

# 軸力密度を設計変数とするトラス構造の 位相と形状の同時最適化手法

林 和希(京都大学)

大崎 純(京都大学)

# トラスの最適化の種類

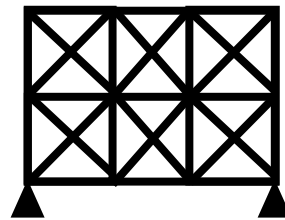
- 部材断面最適化



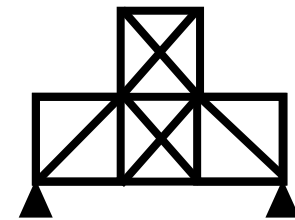
部材断面積



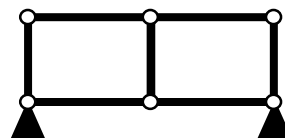
- 位相最適化



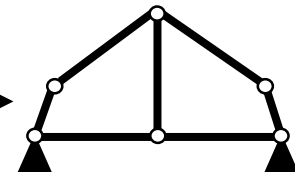
部材接続



- 形状最適化

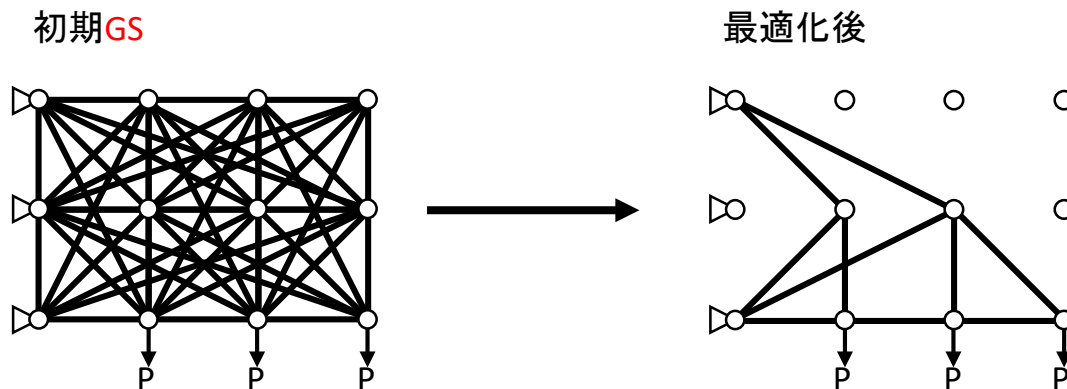


節点位置

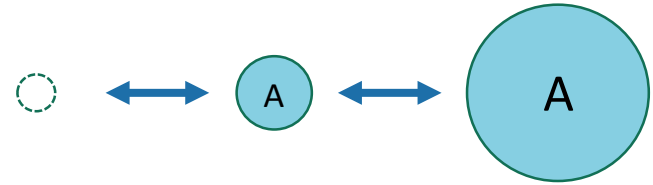


# 位相最適化

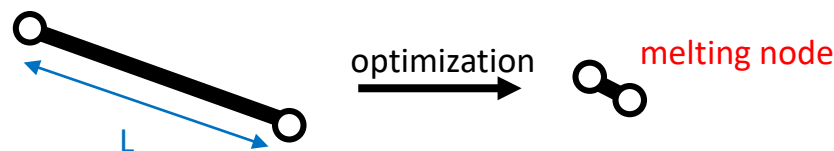
- 多くの研究が存在する
  - グランドストラクチャ(GS) 法
    - …密な位相のモデルから疎な最適位相のトラスを得る手法
- ⇒節点位置は固定なので、形状も同時に最適化するには  
密なGSが必要であり、計算負荷大



# 形状最適化

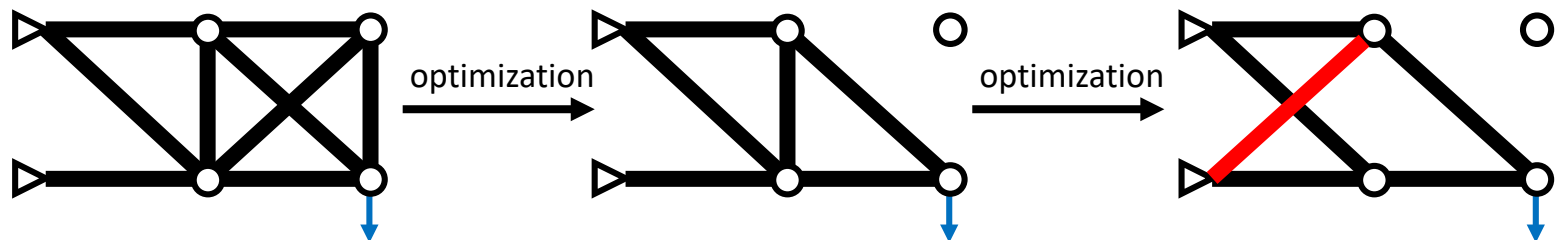


- 節点位置 $x$ に加えて、部材断面積 $A$ も変数とする  
⇒ 細い部材を除去して、位相最適化も可能(同時最適化)
- 節点の可動域を大きくすると、近接した節点(**melting node**)で接続された部材が発生  
⇒ ① 軸方向剛性が $\infty$ に発散し、剛性方程式 $KU=P$ が解けない  
②  $x$ に関する部材長の感度係数が $\infty$ に発散し、勾配に基づく最適化が収束しない



# 成長GS法 (T. Hagishita, M. Ohsaki, 2009)

- シンプルなGSから発見的に節点や部材を追加する手法
- 疎な位相と形状の最適解が得られる
- 得られた解の節点位置に関する大域的最適性を証明できない



# なぜ 軸力密度法 × 最適化？

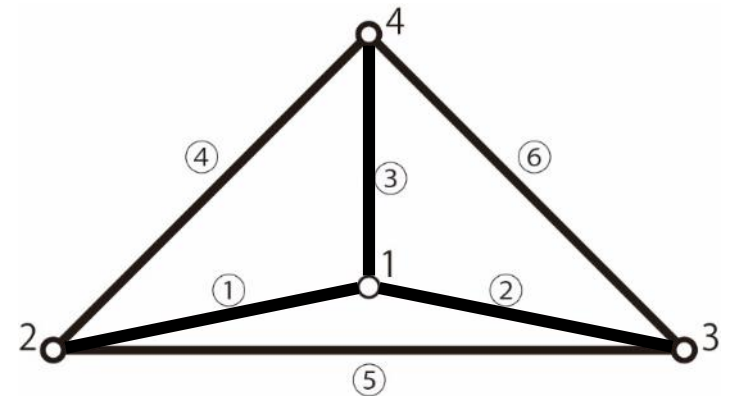
- 軸力密度法: ケーブルやネットワーク構造の形状解析に利用されてきた手法 (Schek, 1974)
- 軸力密度を最適化の設計変数とすることで
  - ① Melting nodesに起因する数値エラーを容易に回避
  - ② 多様な位相と形状の最適解
  - ③ 設計変数の数が部材数だけなので少ない計算負荷

# 接続行列

C : 接続行列・・・部材の接続関係を表す行列

部材*i*が節点 *j, k* (*j < k*) で接続されているとき 
$$\begin{cases} C_{ij} = -1 \\ C_{ik} = 1 \end{cases}$$

	node 1	node 2	node 3	node 4	
$C =$	-1	1	0	0	member 1
	-1	0	1	0	member 2
	-1	0	0	1	member 3
	0	-1	0	1	member 4
	0	-1	1	0	member 5
	0	0	-1	1	member 6



# 軸力密度行列

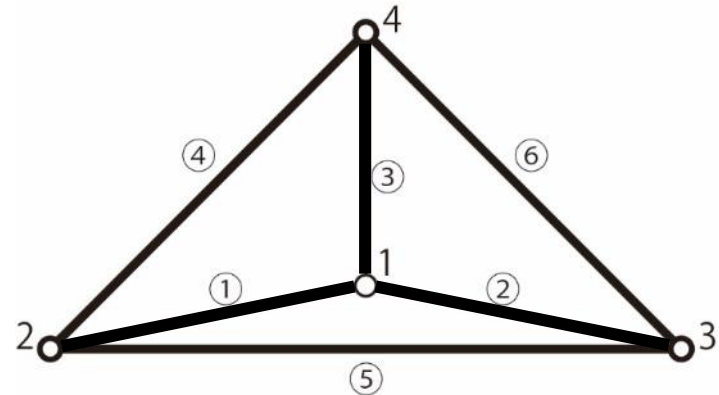
$q_i$  : 軸力密度 = 軸力 / 部材長

$Q$  : 軸力密度行列  $Q = C^T \text{diag}(\mathbf{q}) C$

$X$  : 節点座標

$P$  : 外力・支点反力ベクトル

$QX = P$  : 節点座標を求める式



$$Q = \begin{bmatrix}
 \text{node 1} & \text{node 2} & \text{node 3} & \text{node 4} \\
 q_1 + q_2 + q_3 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\
 & q_1 + q_4 + q_5 & -q_5 & -q_4 \\
 & & q_2 + q_5 + q_6 & -q_6 \\
 & & & q_3 + q_4 + q_6 \\
 \text{node 1} \\
 \text{node 2} \\
 \text{node 3} \\
 \text{node 4}
 \end{bmatrix}$$

*Sym.*



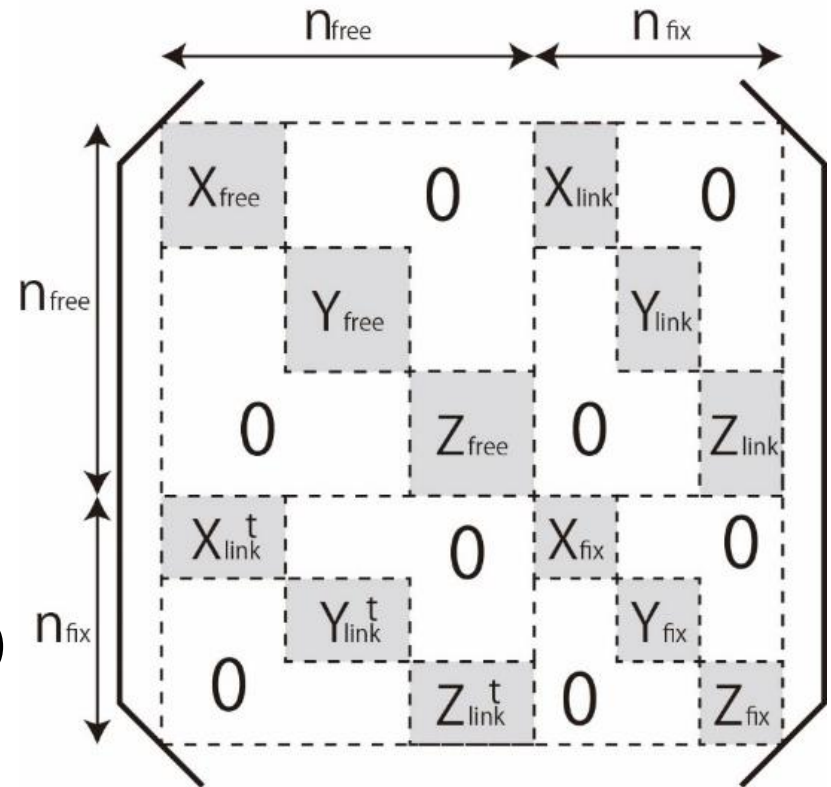
# Qの変形

$\tilde{Q}$  : 固定座標・自由座標成分  
に分解した軸力密度行列

$n_{\text{free}}$  : 自由座標数

$n_{\text{fix}}$  : 固定座標数

$3n$  : 全座標数 (節点数 $n$ の3倍)



# 節点座標

$\tilde{\mathbf{Q}}_{\text{free}}$  :  $\tilde{\mathbf{Q}}$  の自由部分行列

$\tilde{\mathbf{Q}}_{\text{link}}$  :  $\tilde{\mathbf{Q}}$  のリンク部分行列

$\mathbf{X}_{\text{free}}$  : 自由座標ベクトル

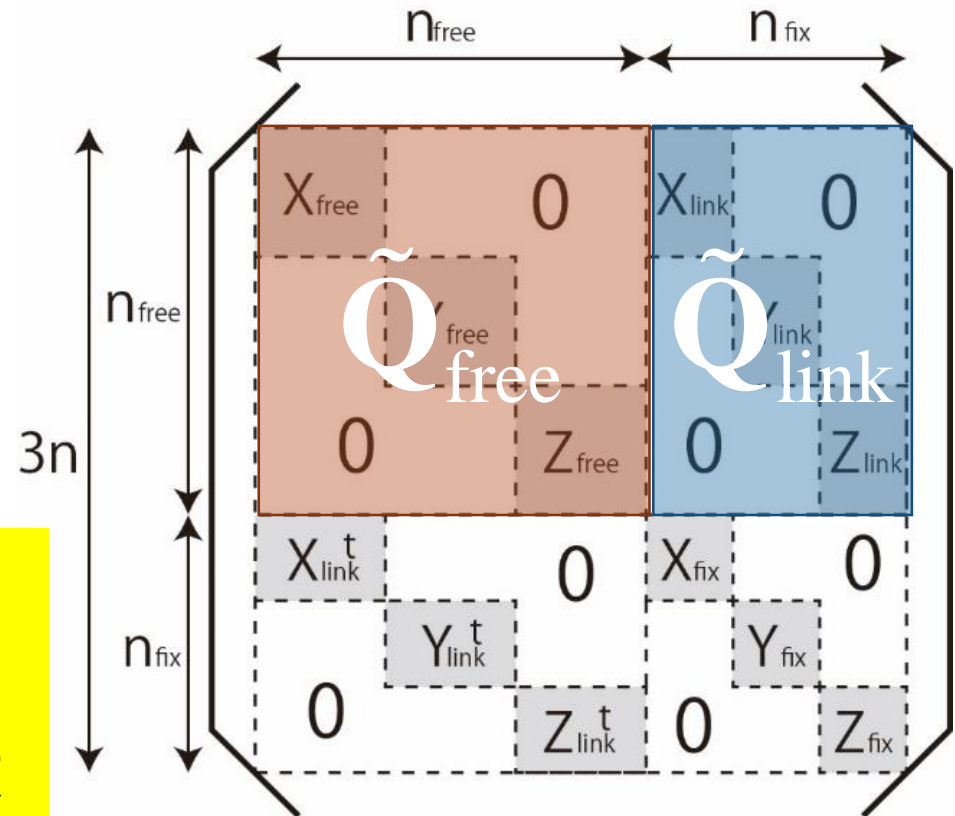
$\mathbf{X}_{\text{fix}}$  : 固定座標ベクトル

外力と内力の釣合式

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{\text{free}} \mathbf{X}_{\text{free}} = -\tilde{\mathbf{Q}}_{\text{link}} \mathbf{X}_{\text{fix}}$$

⇒  $\mathbf{X}_{\text{free}}$  は軸力密度  $q$  の関数

⇒ 軸力密度  $q$  で形状が決定



# 最適化問題

## 体積制約下でのコンプライアンス最小化問題

⇒最適解は静定トラスかつ、各部材の応力の絶対値は一定

$\bar{\sigma}$  : 応力の絶対値

$L_i$  : 部材*i*の長さ

$V_i$  : 部材*i*の体積

$$V_i = \frac{|q_i| L_i^2}{\bar{\sigma}}$$

$E$  : ヤング係数

$A_i$  : 部材*i*の断面積

$S_i$  : 部材*i*のひずみエネルギー

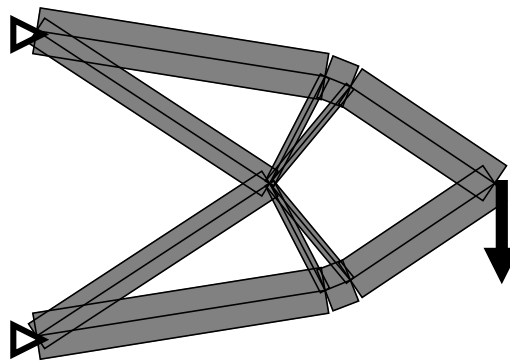
$F$  : コンプライアンス

$$A_i = \frac{|q_i| L_i}{\bar{\sigma}} \quad S_i = \frac{\bar{\sigma} |q_i| L_i^2}{2E}$$

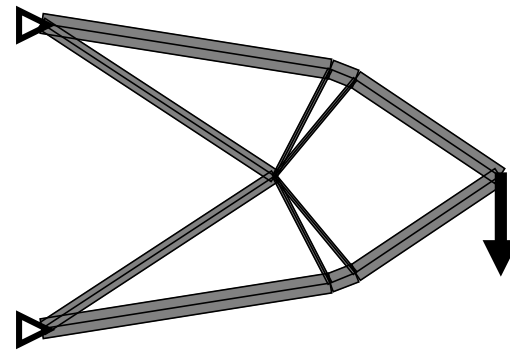
$$F = \sum_{i=1}^m 2S_i = \sum_{i=1}^m \frac{\bar{\sigma} |q_i| L_i^2}{E}$$

# 制約関数(V) × 目的関数(F)

$$VF = \frac{1}{E} \left( \sum_{i=1}^m N_i L_i \right)^2 = \text{const.}$$



$V = 10$   
 $F = 1$

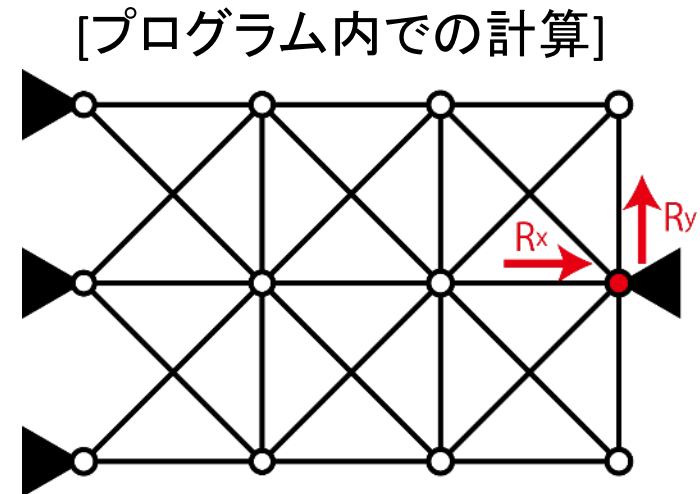
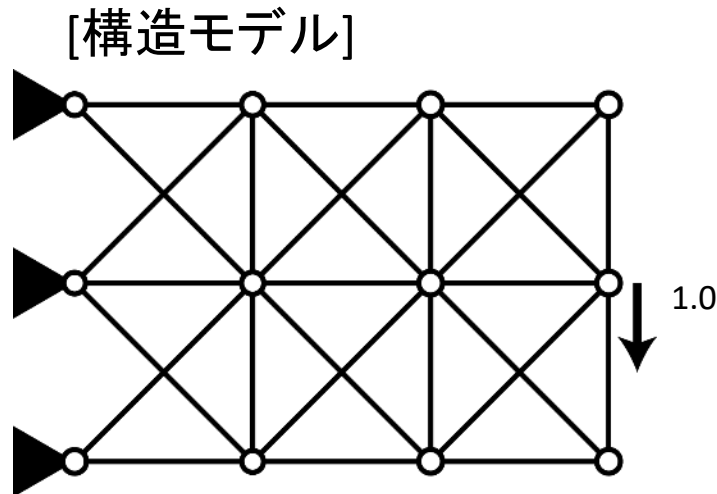


$V = 1$   
 $F = 10$

⇒  $\bar{\sigma}$  を指定してコンプライアンスを最小化した後で部材体積を計算すればよい

# 反力の制約条件

- 荷重作用点是最適化の過程で動かさない  
⇒ 荷重作用点をピン支持とし、反力を制約条件で指定する



If ( $R_x = 0.0$  and  $R_y = 1.0$ ) ⇒ 荷重条件を満たす

# 最適化問題

$q_i^U, q_i^L$  : 部材*i*の軸力密度の上下限值

$R_i$  : *i*番目の反力

$\mathcal{R}$  : 指定する反力の番号

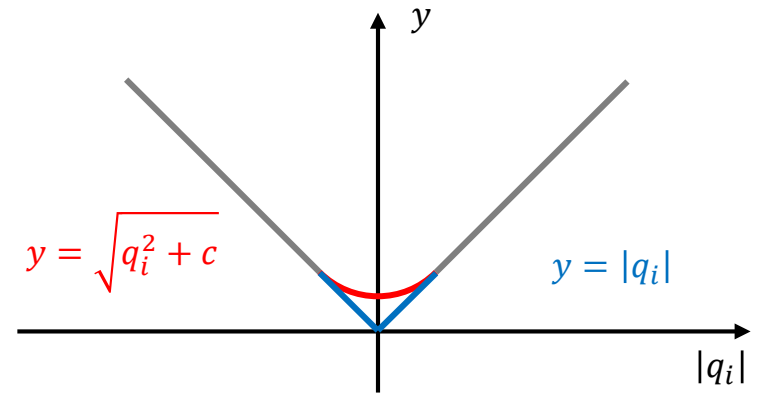
$q_i = 0$ で微分不可

$$\begin{aligned} \text{最適化問題: minimize } & F(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^m \frac{\bar{\sigma} |q_i| L_i^2}{E} \\ \text{subject to } & q_i^L \leq q_i \leq q_i^U \quad (i = 1, \dots, m) \\ & R_i(\mathbf{q}) = \bar{R}_i \quad (i \in \mathcal{R}) \end{aligned}$$

# 変数のスムージング

$|q_i| \cdots q_i = 0$  で不連続

$$\Rightarrow |q_i| \cong \sqrt{q_i^2 + c} \quad (c > 0, c \cong 0)$$



最適化問題: minimize  $F(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^m \frac{\bar{\sigma} \sqrt{q_i^2 + c} L_i^2}{E}$   
subject to  $q_i^L \leq q_i \leq q_i^U \quad (i = 1, \dots, m)$   
 $R_i(\mathbf{q}) = \bar{R}_i \quad (i \in \mathcal{R})$

時間がかかる

# 制約関数を二乗ノルムでまとめる

制約条件式  $R_i(\mathbf{q}) = \bar{R}_i (i \in \mathcal{R})$  は二乗ノルムを用いて  
 $\sum_{i \in \mathcal{R}} (R_i(\mathbf{q}) - \bar{R}_i)^2 = 0$  と書き換えられる

最適化問題: minimize  $F(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^m \frac{\bar{\sigma} L_i^2 \sqrt{q_i^2 + c}}{E}$   
subject to  $q_i^L \leq q_i \leq q_i^U (i = 1, \dots, m)$   
 $\sum_{i \in \mathcal{R}} (R_i(\mathbf{q}) - \bar{R}_i)^2 = 0$



# 感度解析

最適化効率の向上のため、感度解析を用いる

⇒ 目的関数，制約関数を設計変数で偏微分した感度係数を求める必要がある

$$F(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^m \frac{\bar{\sigma} L_i^2 \sqrt{q_i^2 + c}}{E}$$

偏微分

$$\frac{\partial F(\mathbf{q})}{\partial q_l} = \frac{\bar{\sigma} L_l^2 q_l}{E \sqrt{q_l^2 + c}} + \sum_{i=1}^m \left( \frac{\bar{\sigma} \sqrt{q_i^2 + c}}{E} \cdot \frac{\partial L_i^2}{\partial q_l} \right)$$

⇒ 部材長の二乗値  $L_i^2$  の感度係数がさらに必要

# 感度解析

部材長

$$\frac{\partial L_i^2}{\partial q_l} = 2(\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_k) \cdot \frac{\partial(\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_k)}{\partial q_l}$$

代入

節点座標

$$\frac{\partial \mathbf{X}_{free}}{\partial q_l} = \tilde{\mathbf{Q}}_{free}^{-1} \left( -\frac{\partial \tilde{\mathbf{Q}}_{link}}{\partial q_l} \cdot \mathbf{X}_{fix} - \frac{\partial \tilde{\mathbf{Q}}_{free}}{\partial q_l} \cdot \mathbf{X}_{free} \right)$$

代入

目的関数

$$\frac{\partial F(\mathbf{q})}{\partial q_l} = \frac{\bar{\sigma} L_i^2 q_l}{E \sqrt{q_l^2 + c}} + \sum_{i=1}^m \left( \frac{\bar{\sigma} \sqrt{q_i^2 + c}}{E} \cdot \frac{\partial L_i^2}{\partial q_l} \right)$$

制約関数

$$\frac{\partial R}{\partial q_l} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{Q}}_{link}^T}{\partial q_l} + \tilde{\mathbf{Q}}_{link}^T \frac{\partial \mathbf{X}_{free}}{\partial q_l} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{Q}}_{fix}}{\partial q_l} \mathbf{X}_{fix}$$

代入

# 位相を固定した再最適化

最適解は部材が重複し、節点位置も明確ではない

- ① 近接した節点を1つにまとめる
- ② 最適解を初期形状として形状と部材断面を再最適化

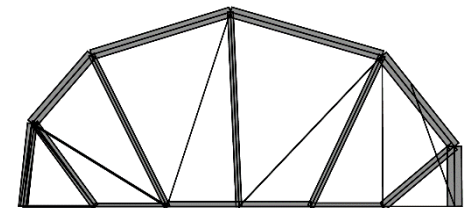
$$\underset{X, A}{\text{minimize}} \quad F(X, A) = \sum_{i=1}^m \frac{N_i^2 L_i}{EA_i}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{i=1}^m A_i L_i \leq \bar{V}$$

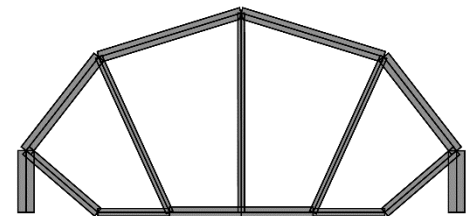
$$X_j^L \leq X_j \leq X_j^U \quad (j = 1, \dots, n_{\text{free}})$$

$$A_i^L \leq A_i \leq A_i^U \quad (i = 1, \dots, m)$$

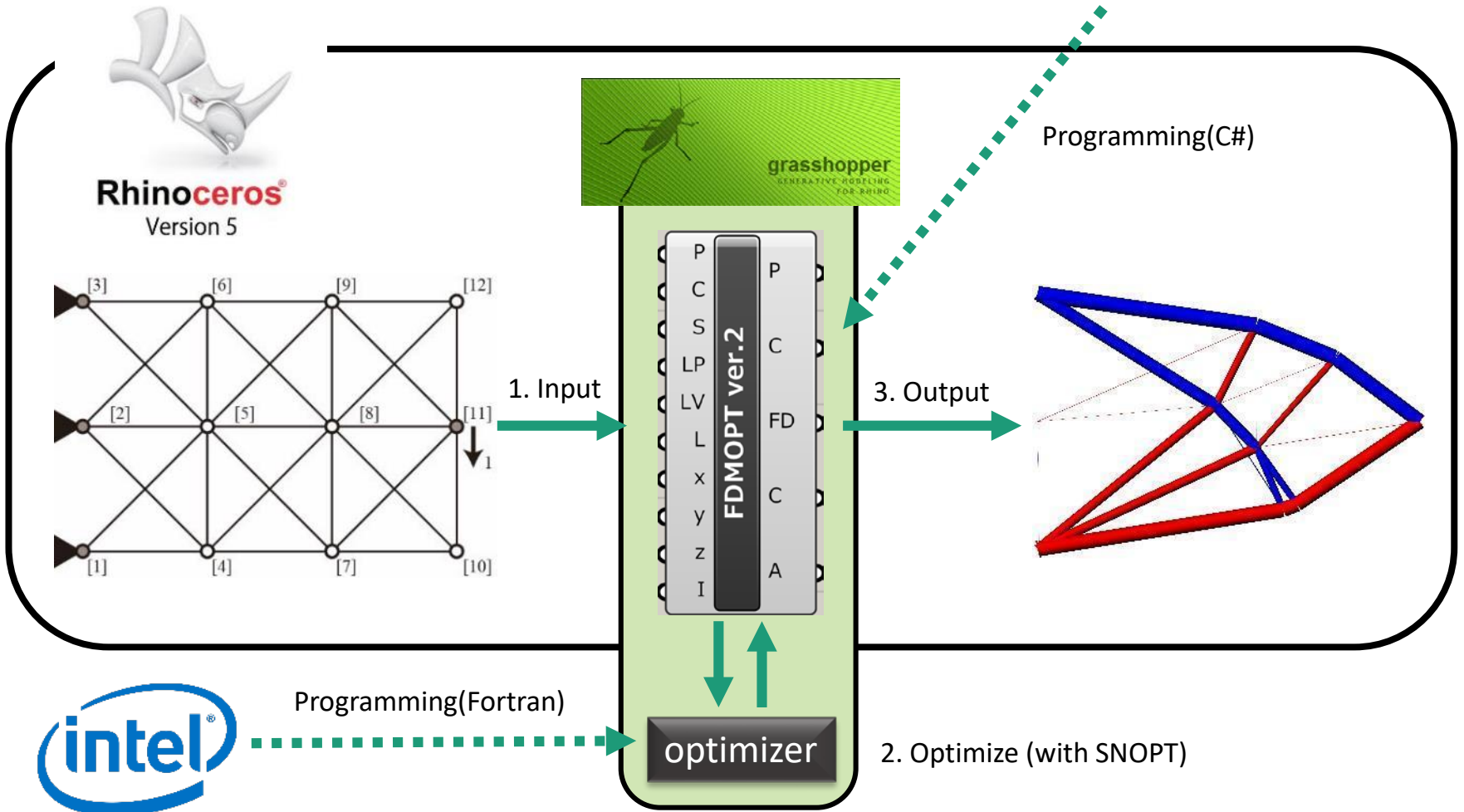
- ③ 細い部材を除去



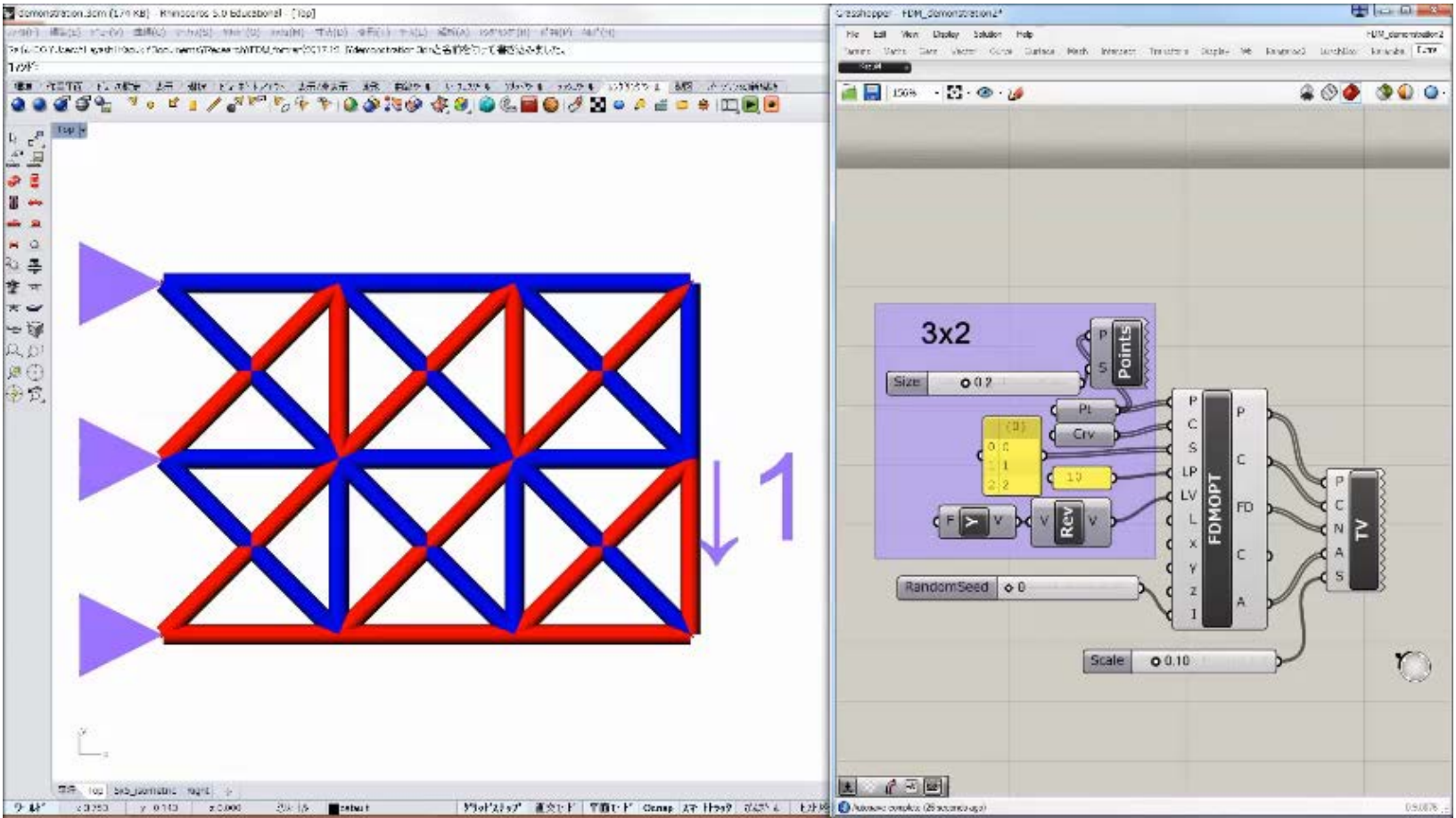
↓ 再最適化



# 解析環境

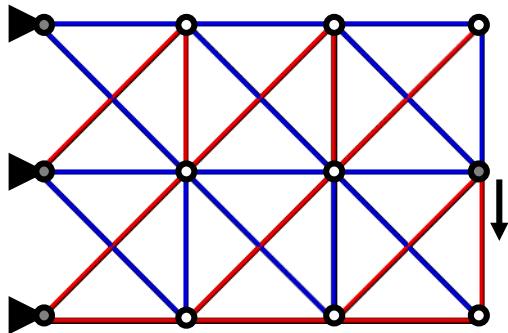


# 解析作業画面 (x2)



# 解析方法

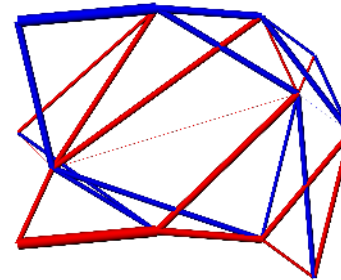
ヤング係数  $E = 1.0$   
部材断面積  $A_i = 1.0$   
応力の絶対値  $\bar{\sigma} = 1.0$



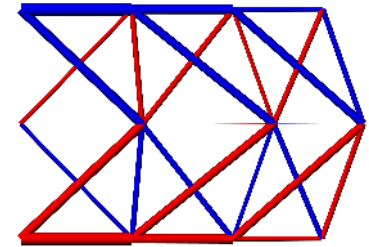
初期形状での軸力密度  $\tilde{q}$

$\tilde{q}$ をランダムマイズ

初期解1

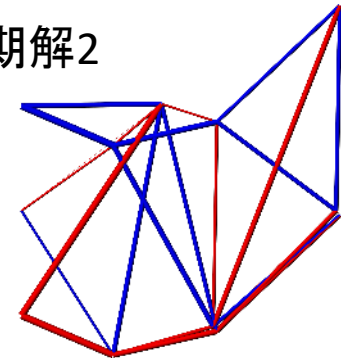


最適化

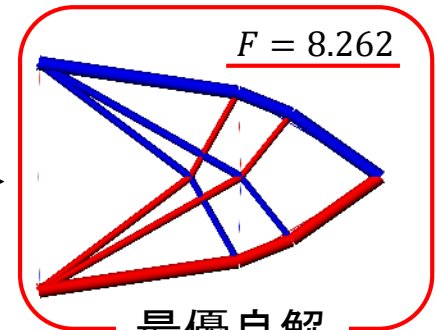


$F = 10.211$

初期解2



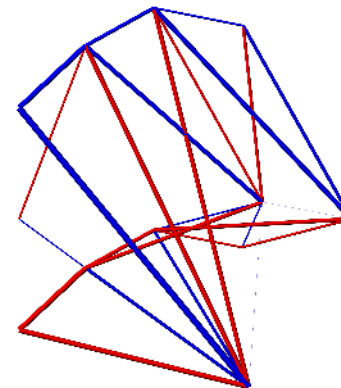
最適化



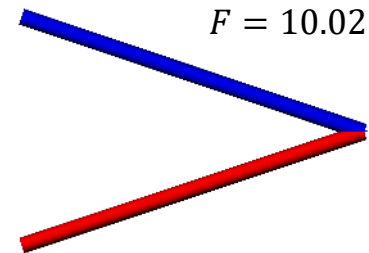
$F = 8.262$

最優良解

初期解100



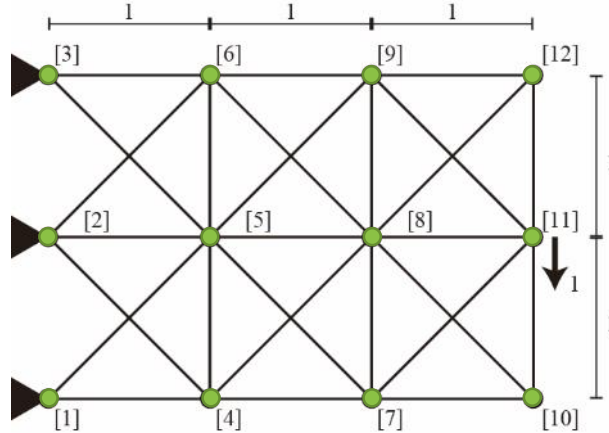
最適化



$F = 10.023$

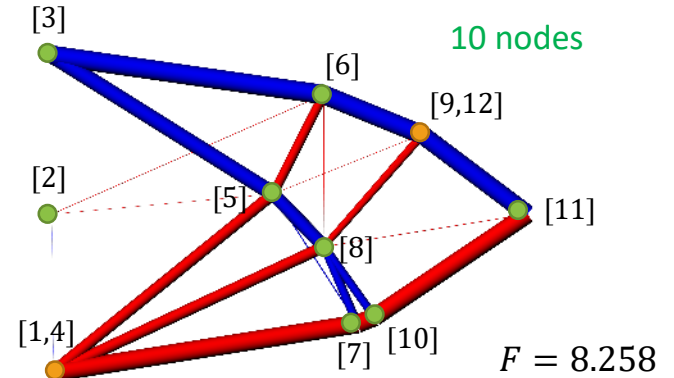
# 3x2 grid

	max	median	min	average	std. dev.
F	24.416	8.741	8.258	8.924	1.638



12 nodes

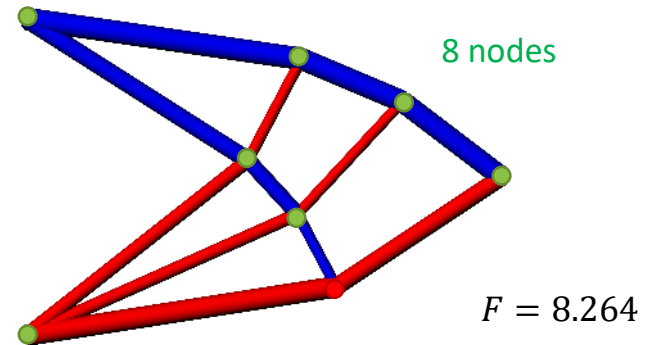
optimize (1.7s)



10 nodes

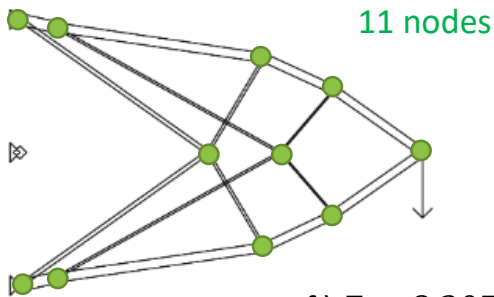
$F = 8.258$

re-optimize (<1s)



8 nodes

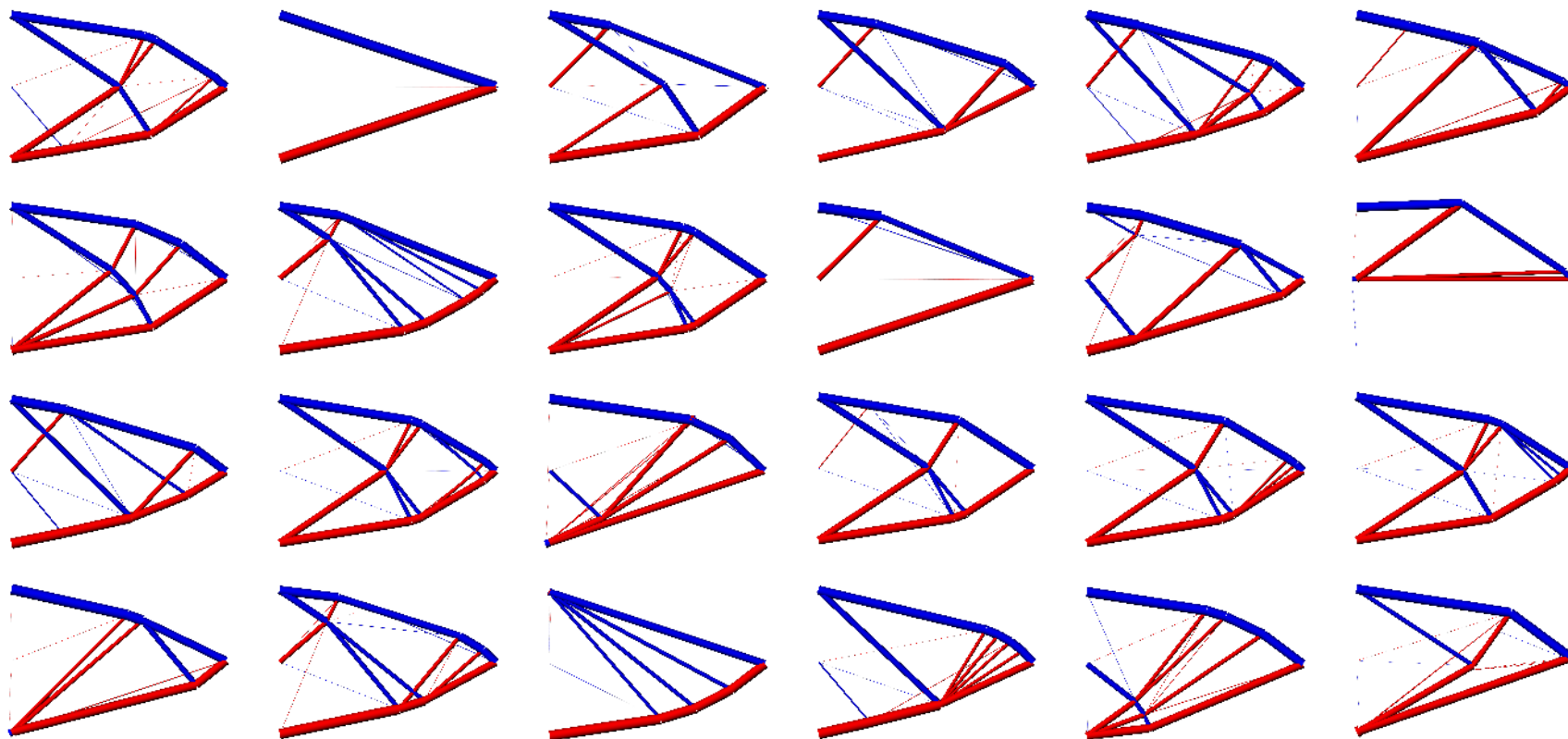
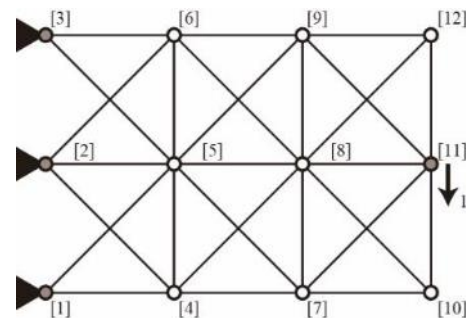
$F = 8.264$



11 nodes

cf.)  $F = 8.307$  (Achtziger, 2007)

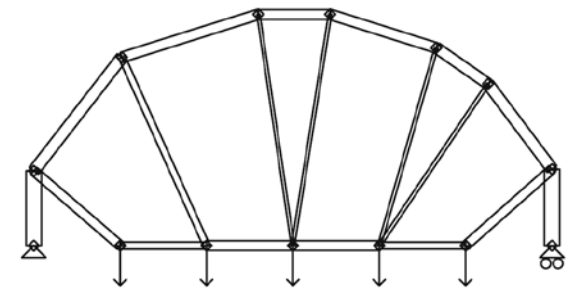
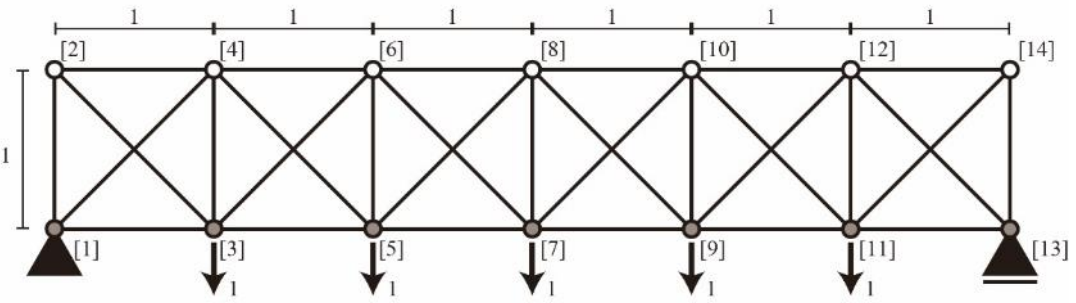
# 多様な解





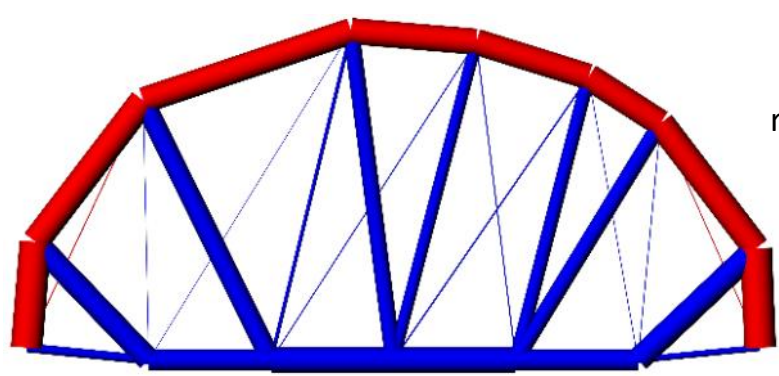
# 6x1 grid

				<b>converge</b>	<b>failure</b>
result				94	6
	<b>max</b>	<b>median</b>	<b>min</b>	<b>average</b>	<b>std. dev.</b>
F	$2.199 \times 10^5$	278.286	119.374	8125.623	$3.448 \times 10^5$



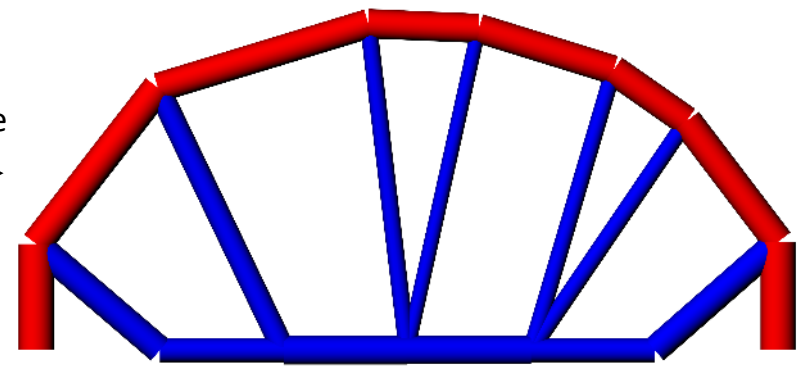
cf.)  $F = 122.447$  (Achtziger, 2007)

optimize (1.0s)



$F = 119.374$

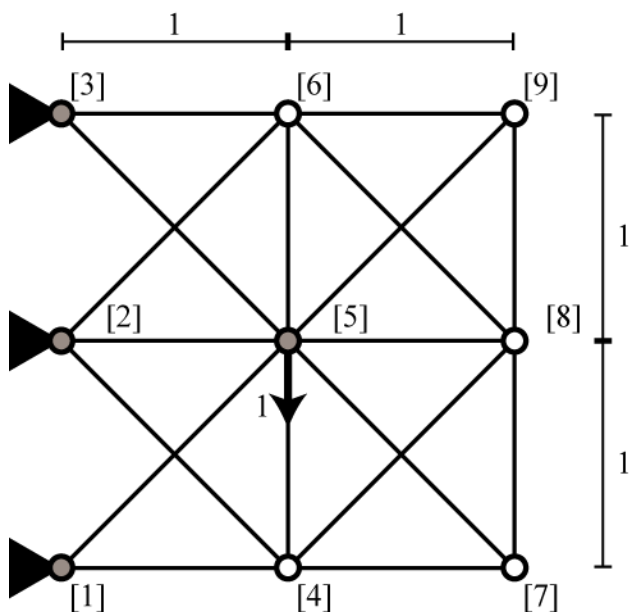
re-optimize



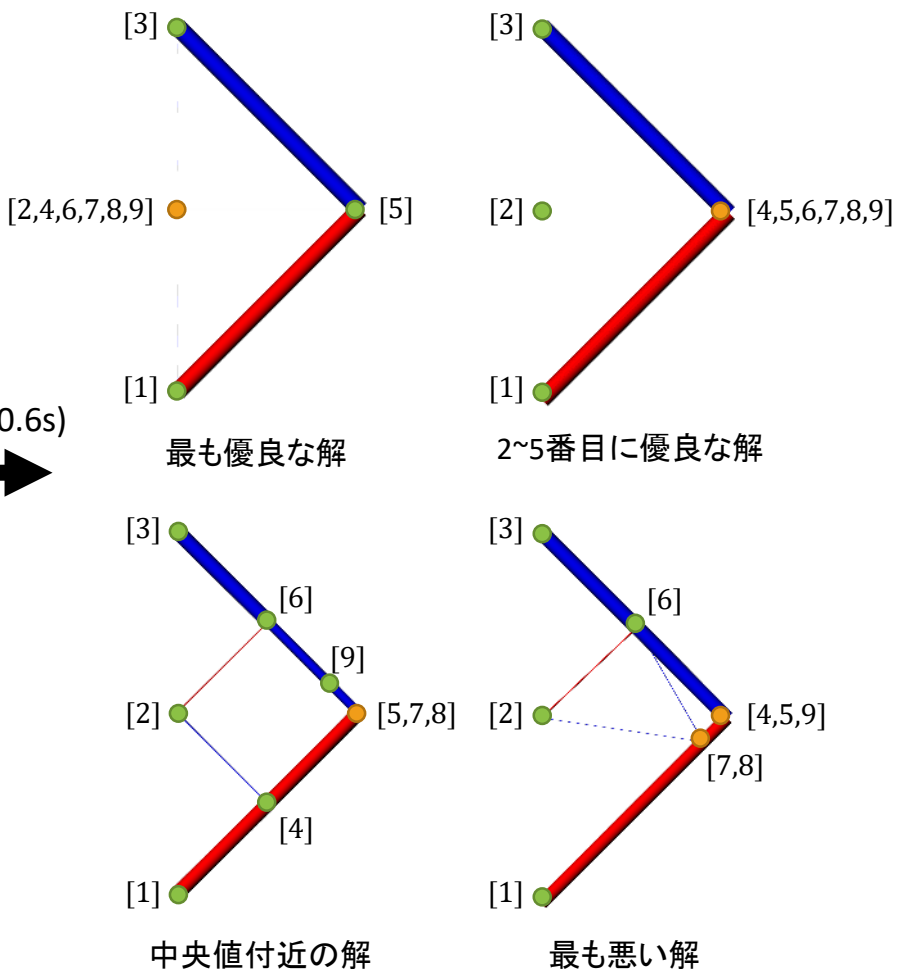
$F = 122.550$

# 2x2 grid

	max	median	min	average	std. dev.
F	0.40012	0.40002	0.39997	0.40002	$1.786 \times 10^{-5}$

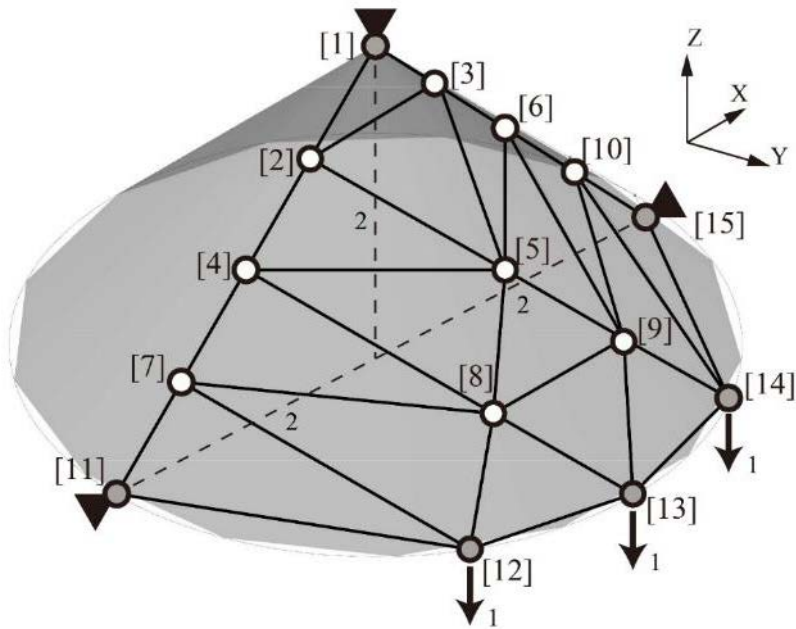


Optimize (0.6s)

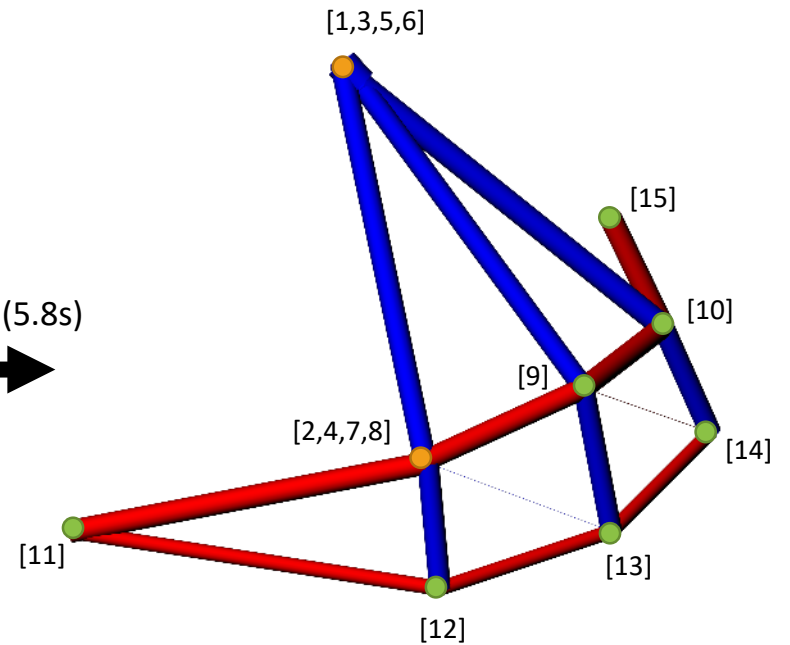


# Half-cone

	max	median	min	average	std. dev.
F	932.028	50.810	42.540	69.718	105.312



Optimize(5.8s)



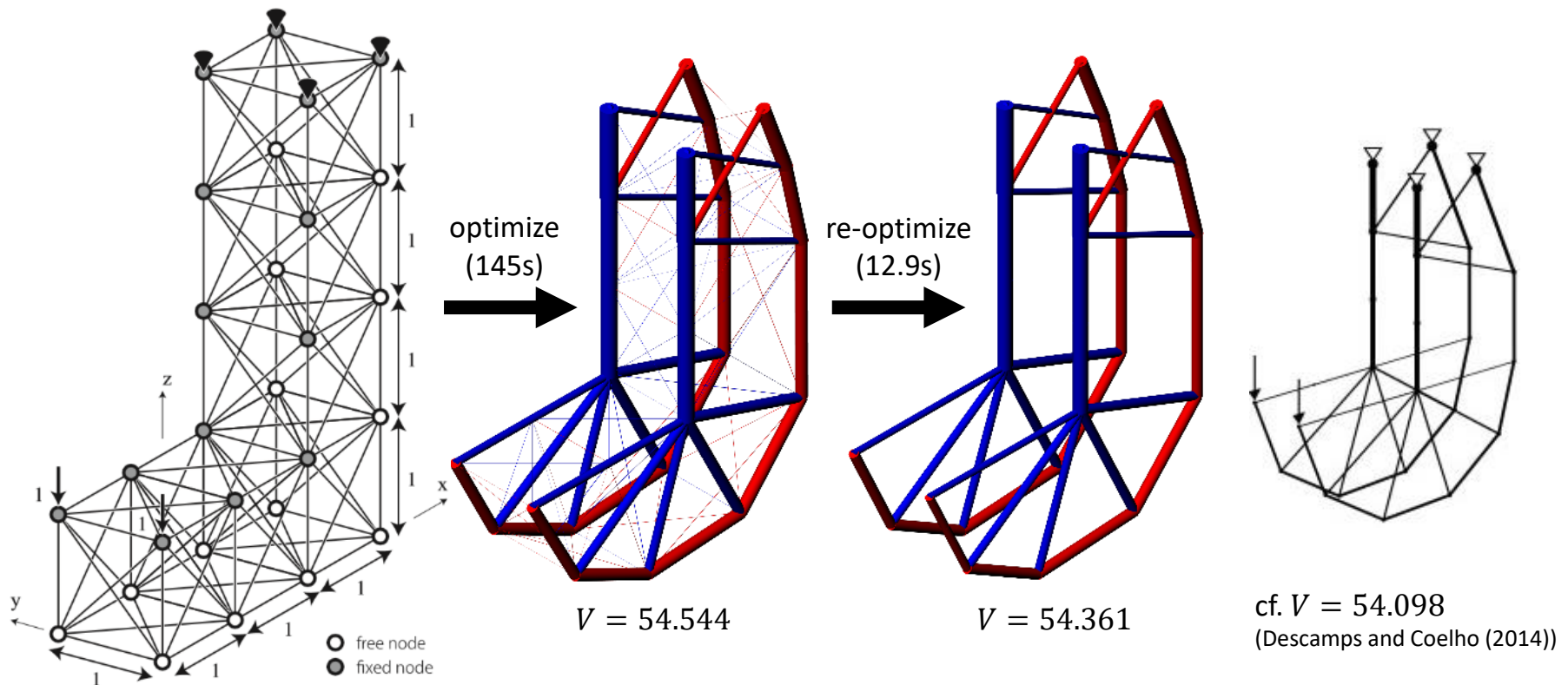
$F = 42.540$

# L-shaped truss

	<b>converge</b>	<b>failure</b>
result	64	36

初期値:  $[\tilde{q}_i \pm 1.0]$   
 上下限值: (初期値) $\pm 100$

	max	median	min	average	std. dev.
V	163.721	56.882	54.544	62.887	21.095

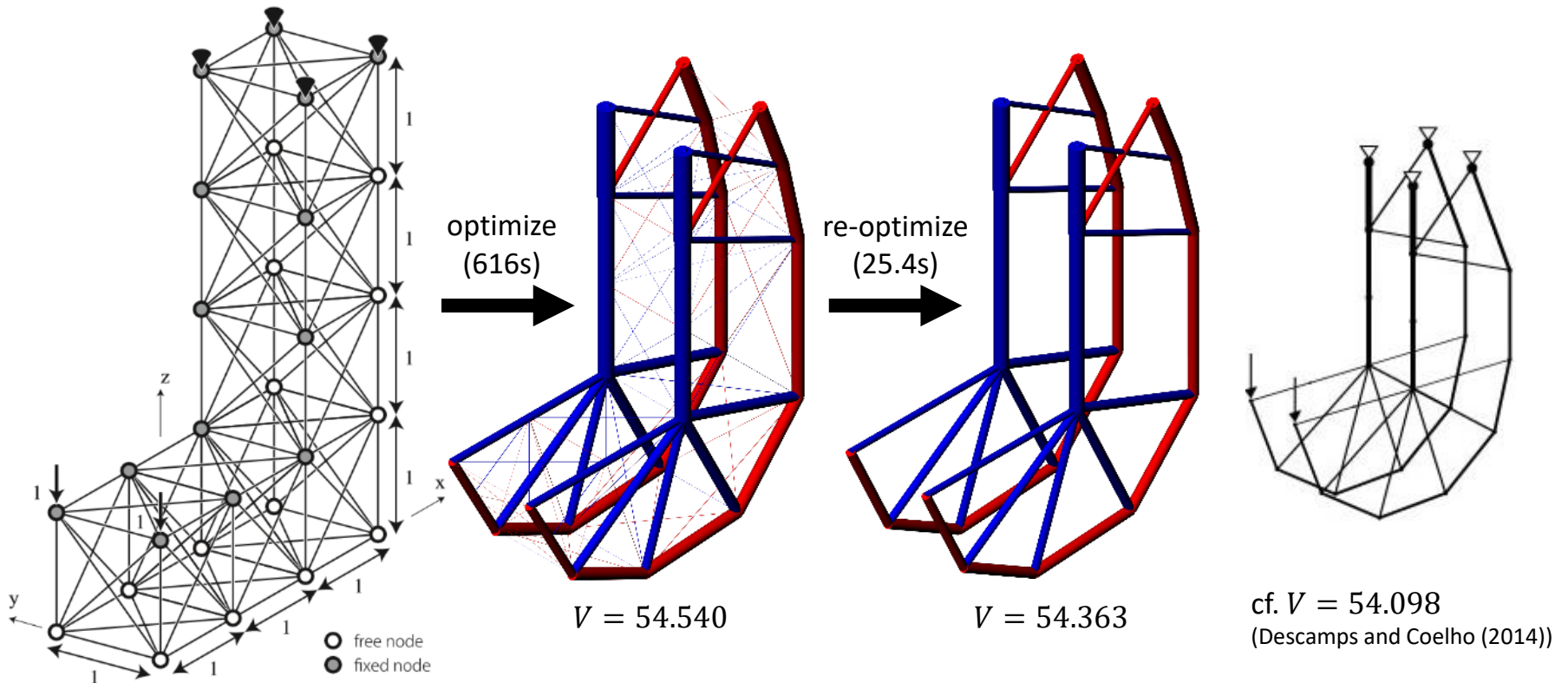


# L-shaped truss

	<b>converge</b>	<b>failure</b>
result	96	4

初期値:  $[\tilde{q}_i \pm 0.1]$   
 上下限值: (初期値)  $\pm 1.0$

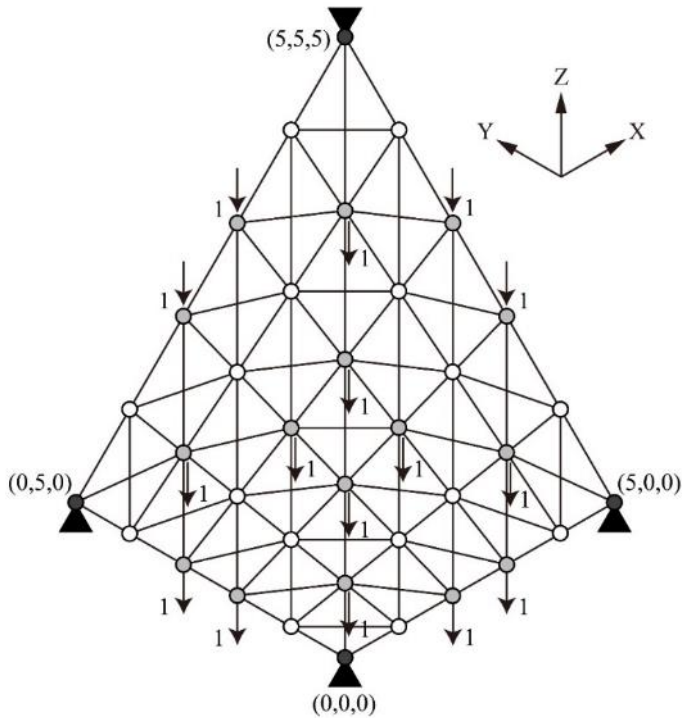
	max	median	min	average	std. dev.
V	72.559	55.008	54.540	55.478	2.026



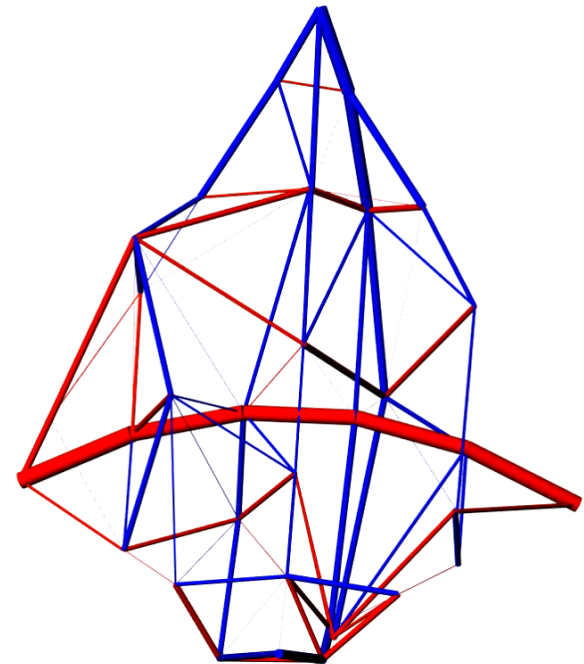
# 5x5 latticed shell

	<b>converge</b>	<b>failure</b>
result	97	3

	max	median	min	average	std. dev.
F	76049.765	3589.120	2016.299	5562.900	8327.407



Optimize(25s)

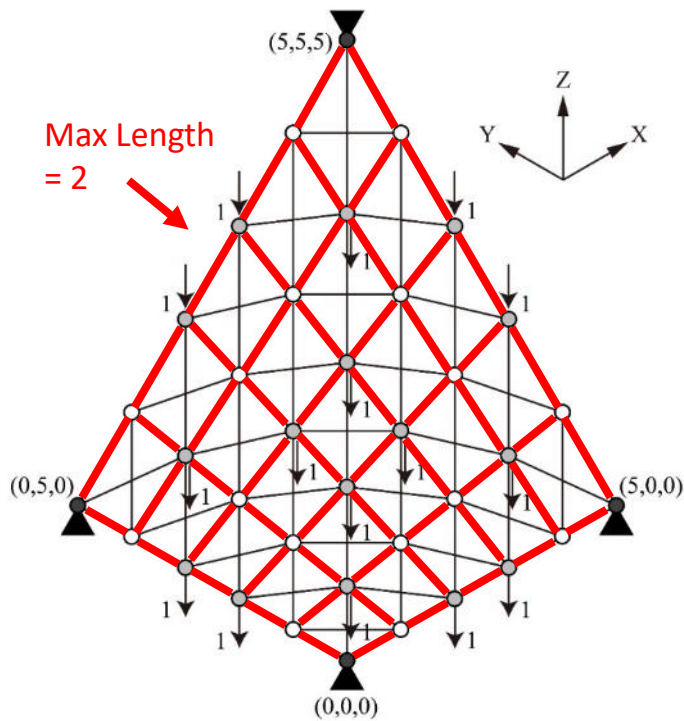


$F = 2016.299$

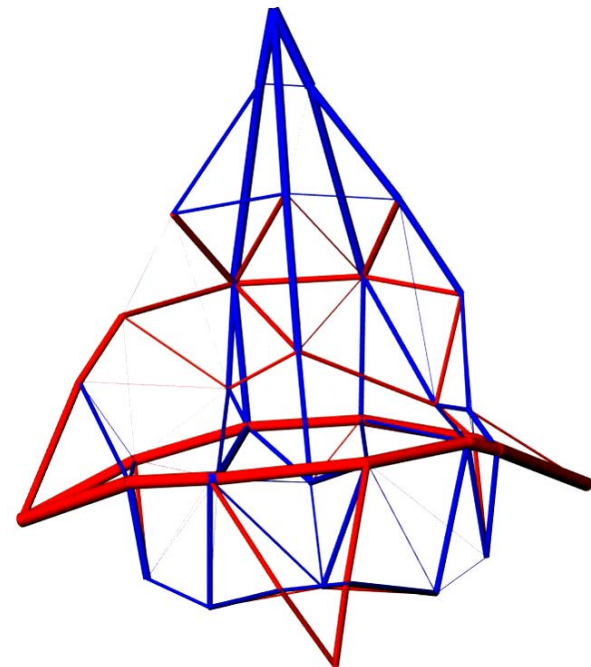
# 5x5 latticed shell

	<b>converge</b>	<b>failure</b>
result	82	18

	max	median	min	average	std. dev.
F	$2.374 \times 10^6$	3266.795	1679.392	39380.53	$2.653 \times 10^6$



Optimize(342s)

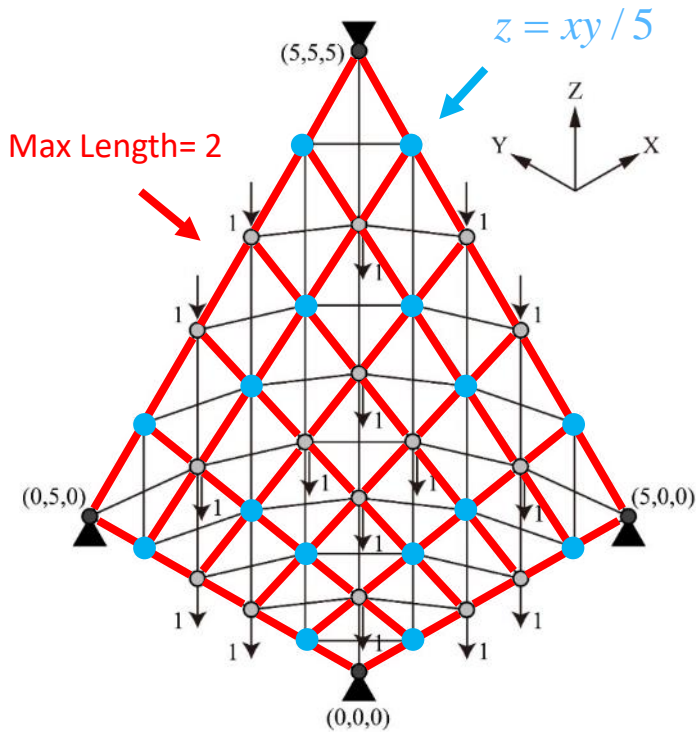


$F = 1679.392$

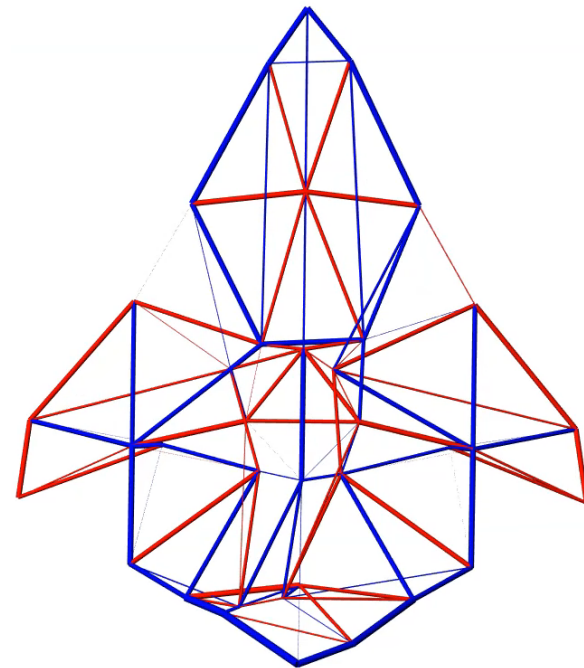
# 5x5 latticed shell

	<b>converge</b>	<b>failure</b>
result	81	19

	max	median	min	average	std. dev.
F	$2.841 \times 10^6$	20237.282	13850.829	$1.609 \times 10^5$	$4.737 \times 10^5$



Optimize(238s)



$F = 13850.829$



# 結論

- A) 比較的疎なGSから多様な形状と位相の最適解が生成
  
- B) 複雑な制約条件を課すことなく、微小な長さ、断面積の部材が発生しても解析可能
  
- C) 本手法をパッケージ化したGrasshopperコンポーネントを作成