建築構造力学　（荒木）

第12章　柱の座屈　No. 2

1　目的

以下の事項の理解を目的とする．

- 単純支持柱の座屈条件式（固有値問題）と座屈モード
- 種々の材端条件の柱の座屈荷重と座屈長さ
- 細長比と圧縮強度

2　単純支持柱の座屈条件式

偏心のない圧縮力を受ける単純支持柱では $M_A = Y_A = 0$ であり、たわみ関数は以下のようにかける。

$$v(x) = C_1 \sin kx + v_A \tag{1}$$

上式を境界条件 $v(0) = v(l) = 0$ に代入して次式が得られる。

$$v_A = 0, \quad C_1 \sin kl = 0 \tag{2}$$

上の第 2 式より、$C_1 = 0$ または $\sin kl = 0$ である。$C_1 = 0$ の場合、$v(x) = 0$ となる。一方、$\sin kl = 0$ の場合、$C_1 \neq 0$ であっても、つまり、たわみが非零であっても境界条件を満たすことができる。このように、**座屈は非零のたわみが存在するための必要条件として記述することができる**[1]。このように、座屈条件を記述する以下の方程式は、**座屈方程式** (buckling equation) と呼ばれる[2]。

$$\sin kl = 0 \tag{3}$$

座屈方程式を満たす kl は、n を正の整数として $kl = n\pi$ とかける。これと k の定義 $k = \sqrt{P/(EI)}$ より、座屈荷重 P_C は以下のように求められる。

$$P_C = n^2 \frac{\pi^2 EI}{l^2} \tag{4}$$

$P(> 0)$ を増加させた時に n 番目に座屈する時の荷重は第 n 次の座屈荷重と呼ばれる。座屈時に生じることが可能なたわみは**座屈モード** (buckling mode) と呼ばれ、単純支持柱では以下のようにあらわせる。

$$v(x) = C_1 \sin kx \tag{5}$$

第 n 次の座屈荷重 $P_C = n^2\pi^2 EI/l^2$ に対応する座屈モードは第 n 次の座屈モードと呼ばれる。例えば、第 1 次の座屈モードは、$k = \pi/l$ より $v(x) = C_1 \sin(\pi x/l)$、第 2 次の座屈モードは、$k = 2\pi/l$ より $v(x) = C_1 \sin(2\pi x/l)$ とあらわせる。このように、**座屈モードは未定定数を含んだ形であらわせる**のが特徴である[3]。第 1 次から第 3 次までの座屈モードを図 1 に示す。

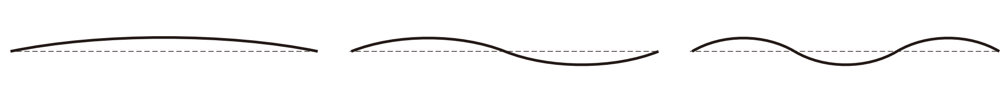


図 1: 座屈モード

[1] 座屈荷重を求める方法は、No. 1 のプリントの偏心荷重のように、非常に小さなたわみ（**不整**と呼ばれる) を与える方法と、本プリントのように非零のたわみが存在するための必要条件として記述する方法に大別される。

[2] 式 (3) は単純支持柱に対する座屈方程式である。座屈方程式は境界条件により異なる。

[3] 非零の解が存在することが可能な特別な P を求める問題は、数学的には**固有値問題**(eigenvalue problem) と呼ばれる。一般に、この特別な値は**固有値**(eigenvalue) と呼ばれ、そのときの非零の解は**固有モード**(eigenmode) と呼ばれる。

3　種々の材端条件の柱の座屈荷重

任意の材端条件の柱の座屈荷重を求める一般的な手順は以下のようにまとめられる。

- **静定柱の場合**：
  1. 釣合式より M_A と Y_A を求め、たわみ関数の一般解 $v(x) = C_1 \sin kx + v_0 - M_A(1-\cos kx)/P + Y_A x/P$ に代入する。
  2. たわみ関数の一般解を境界条件に代入し、C_1 と v_0 のうち、少なくとも一つの未知定数が非零となるための条件として P_C を求める。
- **不静定柱の場合**：たわみ関数の一般解 $v(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 x + C_4$ を境界条件に代入し、少なくとも一つの未知定数が非零となるための条件として P_C を求める。

不静定柱の場合の境界条件の扱いを考える。点 A′ における境界条件は、以下のようにまとめられる。

$$v(0) = v_A,\quad v'(0) = \theta_A,\quad M_A = M(x) = -EIv''(0),\quad Y_A = -Q(0) + Pv'(0) = EIv'''(0) + Pv'(0) \tag{6}$$

点 B′ における境界条件も同様にあらわせる。ここで、上式の Y_A に関する境界条件について考察する。図 2 に示すように、点 A′ での y 方向の外力 Y_A と点 C′ でのせん断力 $Q(x)$ の方向は平行ではない。自由体 A′C′ に関する点 C′ において、材軸方向に ξ 軸、材軸直交方向に η 軸をとる。この時、η 軸方向の力の釣合式は以下のようにあらわせる。

$$Q(x) + Y_A \cos\theta - P\sin\theta = 0 \tag{7}$$

ここで、$\theta \ll 1$ より $\cos\theta = 1$、$\sin\theta = \theta = v'$ の近似を導入すると、$Q(x)$ は以下のようにあらわせる。

$$Q(x) = -Y_A + Pv'(x) \tag{8}$$

また、前回の授業で誘導したように $M(x) = P\{v(x) - v_A\} + M_A - Y_A x$ であるので、この両辺を x で微分すれば以下の式 (9) が成り立つ。式 (9) を式 (8) に代入して整理すれば、式 (6) の第 4 式が得られる。

$$Q(x) = M'(x) = -EIv'''(x) \tag{9}$$

幾つかの代表的な境界条件を持つ柱の座屈荷重と座屈モードについて、単純支持柱の座屈荷重と座屈モードを基準としてまとめたものを図 3 に示す。各境界条件における座屈荷重 P_C と部材長 l に対して、次式を満たす l_k は**座屈長さ** (buckling length) もしくは有効座屈長さと呼ばれる。

$$\frac{\pi^2 EI}{l_k^2} = P_C \tag{10}$$

座屈長さの概念を導入するメリットは以下のようにまとめられる。

1. 図 3 に示すように、単純支持柱の座屈荷重の公式 $P_C = \pi^2 EI/l^2$ さえ記憶しておけば、各座屈モードを単純支持柱の座屈モードと比較することにより、座屈モードから座屈荷重を計算できる。
2. 次章で述べる圧縮力を受ける部材の設計式を簡潔に表現できる。

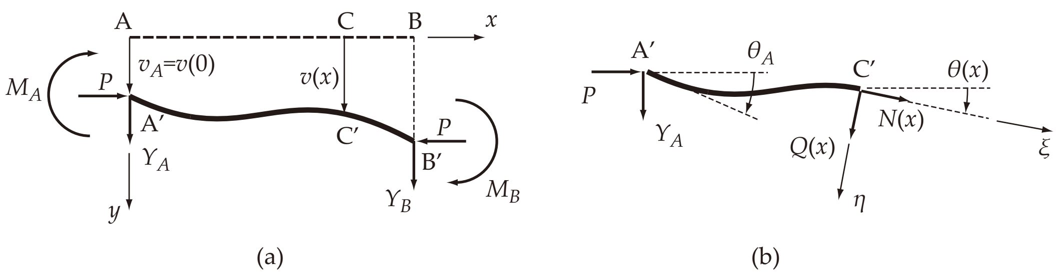


図 2: 自由体 A′C′ に関する材軸直交方向 (η 軸方向) の力の釣合

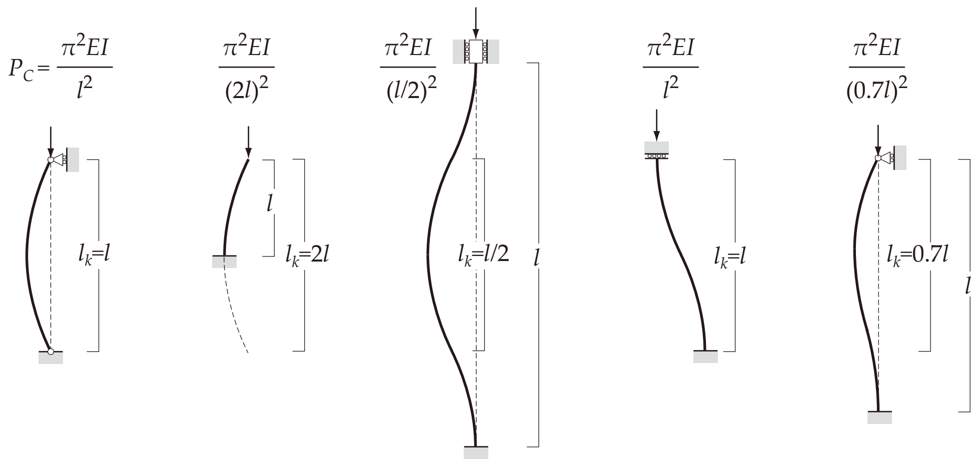


図 3: 各種の境界条件の柱の座屈モードと座屈荷重

4　細長比と圧縮強度

与えられた境界条件における柱の座屈長さを l_k とする。この柱の座屈荷重時の垂直応力を σ_C とし、部材の断面積を A とすると、σ_C は以下のようにあらわせる。

$$\sigma_C = \frac{P_C}{A} = \frac{\pi^2 E}{l_k^2}\frac{I}{A} \tag{11}$$

ここで形状をあらわすパラメタとして**断面 2 次半径** (radius of gyration) r と**細長比** (slenderness ratio) λ を以下のように定義する[4]。細長比は有効細長比とも呼ばれる。

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}}, \quad \lambda = \frac{l_k}{r} \tag{12}$$

この時、λ は部材の細長さをあらわし、λ が大きいほど柱は細長く、λ が小さいほど柱は太短いことがわかる。これらの関係式より、σ_C は λ を用いて以下のようにあらわせる。

$$\sigma_C = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \tag{13}$$

部材が圧縮で塑性化するときの応力を σ_Y とする。圧縮を受ける部材の強度は σ_Y か σ_C のいづれか小さいほうにより定まる。これらの関係を図 4 に示す。設計では、これらの圧縮強度に安全率を考慮して許容応力 σ_a を定め、設計荷重を与えた時に発生する応力が許容応力以下になるように部材の断面寸法を定める。

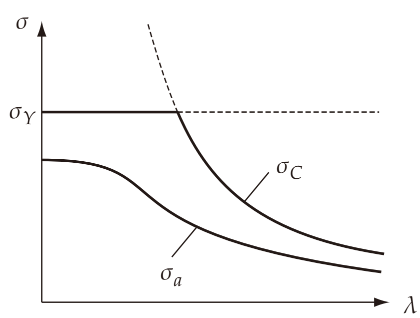


図 4: 細長比と圧縮強度の関係

[4] I は長さの 4 乗、A は長さの 2 乗の単位を持つので、r は長さの単位を持つ。また λ は長さの比であり無次元量である。

第12章　柱の座屈　No. 2　演習問題

学年（　　　　　　）　番号（　　　　　　）　氏名（　　　　　　　　）

1. 長さ l、断面積 A、断面 2 次モーメント I、ヤング係数 E の片持ち柱の座屈荷重と座屈モードを固有値問題より求める。以下の問いに答えよ。

   ヒント：静定柱のたわみ曲線 $v(x) = C_1 \sin kx + v_0 - \dfrac{M_A}{P}(1 - \cos kx) + \dfrac{Y_A}{P}x$

   (a) 柱頭を xy 座標の原点として考える。C_1 と v_0 を未知定数としてたわみ曲線 $v(x)$ をあらわせ。

   (b) 非零のたわみが存在するための必要条件から座屈方程式をかけ。

   (c) 第 1 次と第 2 次の座屈荷重 P_C を求めよ。

   (d) 第 1 次の座屈モードを求め、$C_1 > 0$ であるとして概形を図示せよ。

   (e) 細長比を求めよ。

第12章　柱の座屈　No. 2　演習問題解答

1. (a) $M_A = Y_A = 0$ よりたわみ曲線は以下のようにあらわせる。

$$v = C_1 \sin kx + v_0$$

(b) 境界条件 $v(l) = v'(l) = 0$ より次式が得られる。

$$C_1 \sin kl + v_0 = 0, \quad kC_1 \cos kl = 0$$

$k > 0$ なので、上式の第 2 式より $C_1 = 0$ または $\cos kl = 0$ となる。$C_1 = 0$ の場合は、第 1 式より $v_0 = 0$ となるので、非零解を持たない。よって座屈方程式は以下のようにかける。

$$\cos kl = 0$$

(c) 第 1 次の座屈荷重 P_{C1} と第 2 次の座屈荷重 P_{C2} は、それぞれ $kl = \pi/2$ と $kl = 3\pi/2$ より以下のように求められる。

$$P_{C1} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}, \quad P_{C2} = \frac{9\pi^2 EI}{4l^2}$$

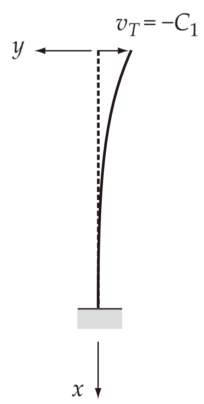
(d) $P = P_{C1}$ の時は、$k = \pi/(2l)$ である。これと $C_1 \sin kl + v_0 = 0$ より、v_0 は以下のようにあらわせる。

$$v_0 = -C_1 \sin kl = -C_1$$

これをたわみ曲線に代入して次式が得られる。

$$v = C_1 \left(\sin \frac{\pi x}{2l} - 1 \right)$$

C_1 の符号と座標の向きに注意して、座屈モードの概系は以下のようにかける。



(e) 座屈長さは次式より $2l$ である。

$$\frac{\pi^2 EI}{l_k^2} = P_{C1} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$

よって、細長比は以下のように求められる。

$$\lambda = \frac{l_k}{r} = 2l\sqrt{\frac{A}{I}}$$